

# ГЛАВА 1 РАЗНОВИДНОСТИ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Методы Рунге-Кутты (методы Рунге-Кутта) — большой класс численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

Метод Рунге-Кутта представляет собой мощный инструмент для численного решения задач, связанных с динамическими системами, включая задачи Коши. Разнообразие данных методов, в зависимости от порядка точности и устойчивости, позволяет выбрать наиболее подходящий для конкретного типа задачи. Основной особенностью методов Рунге-Кутта является последовательное приближение решения через взвешенные суммы значений производных в нескольких точках.

Методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений разделяются на два класса [1, с. 16]:

1) одноступенчатые методы, использующие данные о решении только в одной точке. Однако приходится вычислять функции  $f_i(x, u)$  в нескольких точках  $(x, u)$ . К этим методам относятся методы Рунге-Кутта и метод решения с помощью рядов Тейлора;

2) многоступенчатые, или многошаговые, методы, не требующие много повторных вычислений функций  $f_i(x, u)$ , использующие данные о решении в нескольких точках, что вынуждает применять одношаговые методы для запуска метода и при изменении шага интегрирования. Это методы прогноза-коррекции, Адамса и другие

Существует множество разновидностей этого метода, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки. Основная идея всех методов Рунге-Кутта заключается в более точном приближении кривой решения, чем это делает простейший метод Эйлера.

К методам Рунге-Кутты относятся явный метод Эйлера и изменённый метод Эйлера с пересчётом, представляющие, соответственно, методы первого и второго порядков точности. Хотя существуют стандартные явные методы третьего порядка, они не получили широкого применения. Наиболее распространённым и реализованным в различных математических программах (таких как Maple, MathCAD и Maxima) является классический метод Рунге-Кутты, обладающий четвёртым порядком точности. Для задач с высокой точностью часто применяются методы пятого и шестого порядков. Однако создание схем более высокого порядка связано с большими вычислительными затратами.

Методы седьмого порядка требуют, как минимум, девятнадцати этапов, в

то время как для методов восьмого порядка необходимо не менее 11 этапов. Что касается методов девятого и более высоких порядков, то число необходимых этапов для достижения соответствующей точности остаётся неопределённым и, в целом, не имеет значительного практического применения.

Модернизированные версии также предлагают адаптивные шаги, что позволяет автоматически изменять шаг интегрирования в зависимости от гладкости функции. Это уменьшает количество вычислений в областях, где решение почти линейно, и повышает точность в более сложных местах.

Несмотря на свои достоинства, метод Рунге-Кутты не свободен от ограничений. Например, его применение в задачах с жесткими уравнениями требует особого внимания, и зачастую оказывается более эффективным использовать специализированные методы, такие как метод Адамса или имплицитные схемы. Тем не менее, разнообразие методов Рунге-Кутты предоставляет широкие возможности выбора оптимального подхода в зависимости от специфики решаемой задачи.

## ГЛАВА 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи Коши для системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в общем случае формулируется следующим образом. Найти решение уравнения [2, с.34]:

$$\frac{dU(x)}{dx} = F(x, U) \text{ при } x > x_0, U(x_0) = U^0, \quad (2.1)$$

где  $x_0$  — значение  $x$ ,

$U^0$  — начальное значение вектора  $U$ ,  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ;

$F(x, U) = (f_1(x, U), f_2(x, U), \dots, f_n(x, U))^T$ , или, в развернутом виде:

$$\frac{du_i(x)}{dx} = f_i(x, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad x > x_0, \quad u_i(x_0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем предполагать, что решение системы (2.1) существует и единственно. Для этого, как известно из теоремы Коши, необходимо, чтобы функции  $f_i(x, U)$  и их частные производные по второму аргументу  $\frac{df_i(x, U)}{du_i}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ), были непрерывны по всем аргументам в замкнутой области

$$D = \{ |x| \leq a; |u_i - u_i^{(0)}| \leq b, \quad i = 1, 1, \dots, n \} \quad (2.2)$$

Здесь  $a, b$  — некоторые константы.

Из этих требований следует, что функции  $f_i$  ограничены в области  $D$ , то есть удовлетворяют условию  $|f_i| \leq (M = \text{const})$ , и, кроме того, удовлетворяют условию Липшица по аргументам  $u_i$  [2, с.35]:

$$\begin{aligned} & |f_i(x, u'_1, u'_2, \dots, u'_n) - f_i(x, u''_1, u''_2, \dots, u''_n)| \leq \\ & \leq L \{ |u'_1 - u''_1| + |u'_2 - u''_2| + \dots + |u'_n - u''_n| \} \end{aligned}$$

для любых точек  $(x, u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$  и  $(x, u''_1, u''_2, \dots, u''_n)$  области  $D$ . Здесь  $L$  — константа Липшица. Например, для уравнений первого–третьего порядков задача Коши формулируется следующим образом. Найти решения уравнений:

a)  $\frac{du}{dx} = f(x, u)$  для  $x > x_0$ , при  $u(x_0) = u^0$ ;

b)  $\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, u')$  для  $x > x_0$ , при  $u(x_0) = u^0, u'(x_0) = A$ ;

c)  $\frac{d^3u}{dx^3} = f(x, u, u', u'')$  для  $x > x_0$ , при  $u(x_0) = u^0, u'(x_0) = A, u''(x_0) =$

$A$ ;

Здесь  $A, B, u^0$  — некоторые константы;  
 $u', u''$  — производные функции  $u$ .

# ГЛАВА 3 ОПИСАНИЕ МЕТОДОВ. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ МЕТОДОВ

## 3.1 Метод Эйлера

Метод Эйлера — простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году в работе «Интегральное исчисление». Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности. Он основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией — так называемой ломаной Эйлера.

Для простоты будем рассматривать одно уравнение первого порядка.

Итак, требуется найти решение уравнения [3].

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad (3.1)$$

при  $x > x_0$ ,  $u(x_0) = u_0$  до  $x = x_N$ .

Решение задачи строится следующим образом. Покрывается область определения решения  $D$  функции и (ось аргумента  $x$ ) сеткой  $\omega h$  равноотстоящих точек, начиная от начальной точки:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Расстояния между точками, ради простоты, считаются равными  $h = x_n - x_{n-1} = \text{const}$ . Вводятся сеточные функции  $u_n = u(x_n)$ ;  $y_n = y(x_n)$ ;  $f_n = f(x_n, y_n)$ , определенные в узлах сетки  $\omega h$ , то есть в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ . Функции  $u_n, f(x_n, y_n)$  соответствуют численному решению разностной задачи, а  $u(x_n)$  — решению дифференциальной задачи (3.1). Предполагая, что известно значение  $u_n$  в точке  $x_n$ , и заменяя производную  $u'(x_n)$  в уравнении  $u' = f(x, u)$  выражением  $u'(x_n) = (y_{n+1} - y_n)/h$ , а значение  $u(x_n)$  в функции  $f(x, u)$  через  $y_n$ , получим разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

Решение этого уравнения находится явным образом по рекуррентной формуле  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . (3.2)

**Геометрическая интерпретация метода.** Пусть в точке  $x_n$  получено численное решение задачи  $y_n$ . Полагая  $y_n = y_n$ , проводим через эту точку  $(x_n, y_n)$  гипотетическую интегральную кривую  $u(x)$  и касательную к ней  $f(x_n, y_n)$  (рисунок 3.1). Она при принятых допущениях равна  $f(x_n, y_n)$  [3].

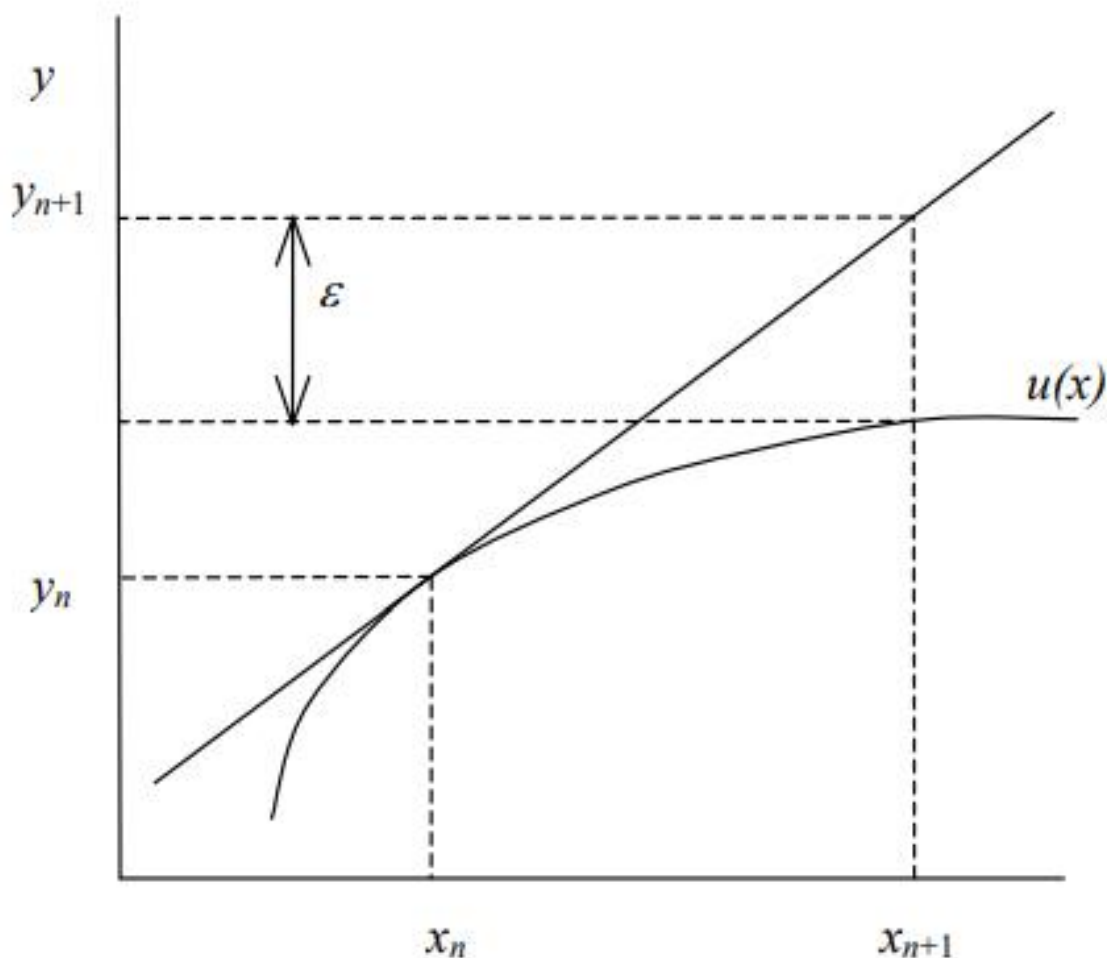


Рисунок 3.1 — Метод Эйлера

Точка пересечения этой касательной с перпендикуляром к оси  $x$ , проходящим через точку  $x_{n+1}$ , дает приближенное значение функции  $y_{n+1}$  в точке  $x_{n+1}$ . При этом погрешность решения равна  $\varepsilon = y_{n+1} - u(x_{n+1})$ . Следовательно, метод Эйлера есть линейная экстраполяция функции  $y$  в точку  $x_{n+1}$  по значениям ее и ее производной в точке  $x_n$ :

$$y_{n+1} = y_n + f_x(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Этот метод является методом Рунге–Кутты первого порядка  $O(h)$ , как будет показано далее. Он обладает большой погрешностью и часто оказывается неустойчивым, так как малая ошибка в начальных данных или из-за округлений при вычислениях увеличивается с ростом  $x$ . Поэтому этот метод редко применяется на практике. Чаще в расчетах применяются методы Рунге–Кутты более высокого порядка точности, например, второго или четвертого.

Достоинством метода Эйлера является его простота и высокая скорость поиска решения [3].

Недостатками метода Эйлера являются малая точность и систематическое

накопление ошибок, так как при вычислении значений на каждом последующем шаге исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предшествующих вычислений.

### 3.2 Исправленный метод Эйлера

Этот метод основывается на вычислении функции  $y(x_{n+1})$  в последующей точке  $x_{n+1}$  по значению среднеарифметической величины тангенсов углов наклона касательной к интегральной кривой  $y(x)$  в двух точках  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . При этом предполагается известным решение задачи  $y_n$  в точке  $x_n$ . Метод состоит из двух шагов [4]:

1) по методу Эйлера (3.2) предварительно находится приближенное значение  $\bar{y}_{n+1}$  в точке  $x = x_n + h$  по формуле:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

и в ней вычисляется функция  $f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$ .

2) тангенсы углов наклона касательных в точках  $(x_n, y_n)$  и  $(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$  складываются, и берется их среднее арифметическое значение  $\Phi(x_n, y_n, h)$ :

$$\Phi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$$

где  $f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$ .

После чего находится окончательное (уточненное) значение функции  $y_{n+1}$  в точке  $x_{n+1}$  по формуле

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h),$$

или в развернутом виде

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] \quad (2.3)$$

Таким образом, при вычислении  $y_{n+1}$  функцию  $f(x, y)$  приходится вычислять дважды в точках  $(x_n, y_n)$  и  $(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$ . Исправленный метод Эйлера можно представить в стандартном для методов Рунге–Кутты виде, если обозначить

$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$ ;  $k_1 = f(x_n, y_n)$ :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=1}^2 k_i/2$$

**Геометрическая интерпретация метода.** Как и в методе Эйлера, в точке  $(x_n, y_n)$  строится касательная  $L_1$  к гипотетической интегральной кривой  $u(x)$ , и находится предварительное значение  $n+1$   $y$  в точке пересечения этой касательной с перпендикуляром к оси  $x$ , проходящим через точку  $x_{n+1}$  (рисунок 3.2). Далее, в точке  $(x_{n+1}, y_n + h)$  снова строится касательная  $L_2$  к кривой  $u(x)$ . Затем определяется среднеарифметическое тангенсов углов наклона этих касательных (кривая  $L_3$ ) и проводится через точку  $(x_n, y_n)$  линия  $L_0$ , параллельная линии  $L_3$ . Точка пересечения этой линии с ординатой, проходящей через точку  $x_{n+1}$ , дает уточненное значение функции  $y_{n+1}$  в точке  $x_{n+1}$  [3].

Оценка погрешности аппроксимации (невязки  $\psi_n$ ) формулы (3.3) на основе разложения в ряд Тейлора функций  $u_{n+1}$  и  $f(x_n + h, y_n + h f(x_n, u_n))$  показывает, что данный метод имеет второй порядок аппроксимации  $O(h^2)$ .

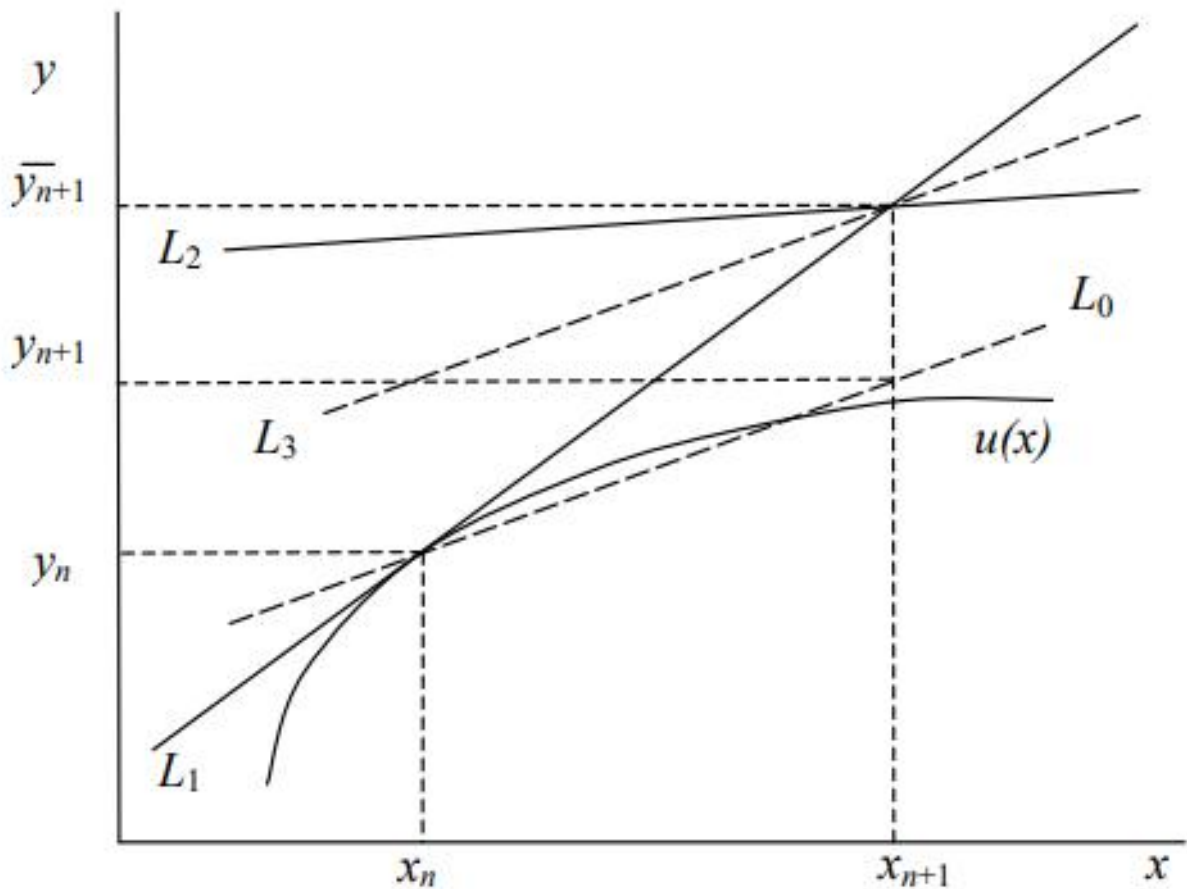


Рисунок 3.2 — Исправленный метод Эйлера

Исправленный метод Эйлера, так же как и исправленный, является

методом второго порядка.

Преимущества исправленного метода Эйлера:

1. Улучшенная точность: В отличие от простого метода Эйлера, который может приводить к значительным погрешностям, исправленный метод обеспечивает лучшую аппроксимацию решения благодаря использованию средней оценки наклона.

2. Стабильность: Метод проявляет большую стабильность при работе с жесткими уравнениями, что делает его предпочтительным для некоторых систем.

3. Простота реализации: Метод относительно прост для понимания и реализации, что позволяет применять его в различных задачах.

Однако исправленный метод Эйлера имеет и свои недостатки:

1. Численное время: Процесс вычисления включает в себя дополнительные операции из-за корректировочного шага, что может увеличить время выполнения, особенно для сложных систем.

2. Ограниченная точность: Несмотря на улучшение по сравнению с простым Эйлера, метод все равно имеет ограничения по точности для высоких порядков.

3. Необходимость в оценке шагов: Выбор шага может требовать дополнительных усилий для достижения оптимальных результатов.

4. В целом, исправленный метод Эйлера является полезным инструментом в арсенале численных методов, обладая как явными преимуществами, так и недостатками.

### 3.3 Модифицированный метод Эйлера

В этом методе вместо усредненного значения угла наклона касательных в точках  $(x_n, y_n)$  и  $(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$  используется значение угла наклона касательной в точке  $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$ , расположенной посередине между точками  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . Как и ранее, предполагается известным значение решения  $y_n$  в точке  $x_n$ .

Метод состоит из двух шагов [4]:

1) первый шаг — расчет значения функции  $y_{n+1/2}$  в точке  $(x_n+h/2)$  по методу Эйлера (3.2):

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

2) второй шаг — расчет функции  $y$  в точке с координатой  $x_{n+1}$  с использованием значения функции  $f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$  в точке  $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$ :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_{n+1/2})$$

Таким образом, расчетные формулы имеют следующий вид:

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) \quad (3.4)$$

Обозначая через  $k_1 = f(x_n, y_n)$ ,  $k_2 = f(x_n+h/2, y_n+hk_1/2)$ , метод можно представить в обычном для методов Рунге–Кутты виде:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = k_2.$$

Этот метод также является методом Рунге–Кутты второго порядка. Здесь тоже приходится вычислять дважды функцию  $f(x, y)$  для получения решения в следующей точке  $x_{n+1}$ .

**Геометрическая интерпретация метода.** В точке  $(x_n, y_n)$  строится касательная  $L_1$  к гипотетической интегральной кривой  $u(x)$  (рисунок 3.3). Точка пересечения ее с перпендикуляром к оси  $x$ , проходящим через точку  $x_{n+h/2}$ , дает значение функции  $y_{n+1/2}$ . В этой точке  $(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$  снова проводится касательная  $L_2$  к кривой  $u(x)$ . Для получения решения  $y_{n+1}$  проводится через точку  $(x_n, y_n)$  линия  $L_0$  параллельно касательной  $L_2$ . Точка пересечения  $L_0$  с ординатой  $x_{n+1}$  дает искомое решение  $y_{n+1}$ .

Оценка невязки метода (3.4) при помощи ряда Тейлора, как показано ниже, дает второй порядок аппроксимации  $O(h^2)$  [5].

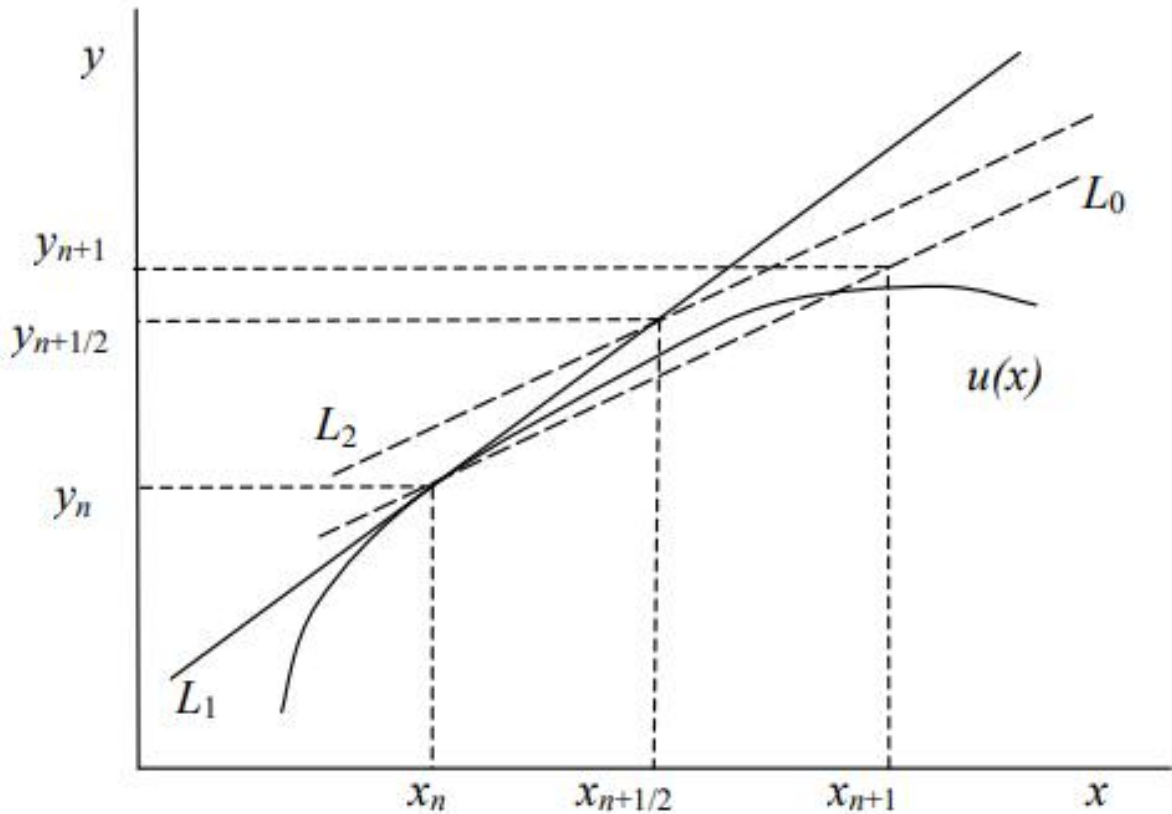


Рисунок 3.3 — Модифицированный метод Эйлера

Для анализа погрешности численного решения модифицированным методом Эйлера получим точное решение задачи Коши для модельного уравнения

$$u' = \lambda u \text{ при } x > 0, u(0) = a \quad (3.5)$$

где  $a, \lambda$  — некоторые константы. Формула модифицированного метода Эйлера (3.4) для уравнения (3.5) имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h y_n \left( \lambda + \frac{h \lambda^2}{2} \right) = y_n (1 + h \lambda + h^2 \lambda^2 / 2)$$

так как в данном случае:

$$f(x, y) = \lambda y, \text{ то } f \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right) = \lambda (y_n + h \lambda y_n / 2).$$

Таким образом, точное решение уравнения (3.4) для модельного уравнения (3.5) в точке  $x_{n+1}$  имеет вид [5]:

$$y_{n+1} = a (1 + h \lambda + h^2 \lambda^2 / 2)^{n+1} \quad (3.6)$$

В то же время точное решение дифференциального уравнения (3.5) есть

$u = ae^{\lambda x}$ , которое при  $x=h$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $x=0$ :

$$u = a(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \frac{h^3\lambda^3}{3!} + \dots) \quad (3.7)$$

Из сопоставления уравнений (3.6) и (3.7) видно, что численное решение задачи (3.5) представляет собой три первых члена разложения функции  $e^{\lambda h}$  в ряд Тейлора, то есть точного решения дифференциального уравнения (2.5), и ошибка его  $|u_n - y_n|$  возрастает с увеличением  $x$  при  $\lambda > 0$ .

В случае  $\lambda < 0$  уравнение (3.5) будет иметь асимптотически устойчивое решение, затухающее с увеличением  $x$  ( $u = ae^{-|\lambda|x}$ ), тогда как численное решение:

$$y_{n+1} = a(1 - h|\lambda| + h^2\lambda^2/2)^{n+1} \text{ при } h > 2/|\lambda|$$

с увеличением  $n$  неограниченно возрастает. Это явление называют частичной неустойчивостью, и проявляется оно с увеличением  $h$ , начиная с некоторого  $h > h_k$ , во всех явных методах типа Рунге–Кутты. Явление это не следует путать с неустойчивостью разностной схемы (метода), которая проявляется при уменьшении шага интегрирования  $h$ .

Следует отметить, что явление частичной неустойчивости в явных методах Рунге–Кутты проявляется и при решении уравнений, не имеющих асимптотически устойчивых решений. В этих случаях частичная неустойчивость затухает с ростом самого решения [5].

Преимущества модифицированного метода Эйлера включают его простоту и понятность, что делает его подходящим для начального изучения численных методов. Он обеспечивает более высокую точность по сравнению с простым методом Эйлера благодаря использованию среднего значения производной, что позволяет избегать некоторых ошибок, возникающих при использовании первого метода. Метод также легко реализуем на компьютере.

Однако у этого метода есть и недостатки. Во-первых, он все еще остается одноступенчатым и может быть менее устойчивым для жестких дифференциальных уравнений. Во-вторых, время вычислений увеличивается, так как для каждой итерации требуется вычисление дополнительной производной. Это может привести к неэффективности при решении задач с высоким требованием к точности. Таким образом, выбор метода зависит от конкретной задачи и требуемой точности.

### 3.4 Метод Рунге-Кутты 4 порядка

**Метод Рунге-Кутта 4-го порядка** — это численный метод, используемый для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Он характеризуется итеративным процессом, в котором он вычисляет приближенные решения с дискретными временными шагами, оценивая промежуточные значения на основе наклона функции. Этот метод широко применяется в научных и инженерных дисциплинах благодаря своей универсальности, точности и числовой стабильности.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка находит обширное применение в научном моделировании, проектировании инженерных систем, математическом моделировании и научных расчетах. Его применение охватывает многочисленные области науки и техники, где дифференциальные уравнения описывают поведение комплексных систем. Надежность и универсальность метода позволяют исследователям и инженерам решать сложные задачи, проводить всесторонний анализ и принимать обоснованные решения.

На практике метод Рунге-Кутты реализуется через серию итерационных шагов, которые включают оценку промежуточных значений на основе наклона функции на каждом шаге. Этот итерационный процесс позволяет методу точно отражать динамику системы, что делает его популярным выбором для моделирования и анализа реальных физических явлений. Благодаря использованию высокопорядочных аппроксимаций, метод обеспечивает улучшенную точность и устойчивость, что делает его неотъемлемым в численных расчетах.

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$(p = 4, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = 1, b_{21} = \frac{1}{2}, b_{31} = 0, b_{32} = \frac{1}{2}, b_{41} = 0, b_{42} = 0, b_{43} = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{6})$$

является одним из самых широко используемых методов для решения Задачи Коши (3.8):

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$
$$\Delta y_k = \frac{1}{6} (K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \quad (3.8)$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k)$$

$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k)$$

$$K_3^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k)$$

$$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k)$$

Несмотря на свои преимущества, этот метод имеет и некоторые недостатки.

Во-первых, он требует больше вычислительных ресурсов по сравнению с методами низшего порядка, что может быть критично при решении задач с высокой размерностью или в реальном времени.

Во-вторых, в случаях, когда уравнение имеет особенности, такие как ярко выраженные сингулярности или резкие изменения, метод может демонстрировать нестабильное поведение, что потребует применения более сложных адаптивных алгоритмов.

С учетом этого, выбор метода должен основываться на анализе специфики решаемой задачи, учитывая как достоинства, так и недостатки метода Рунге-Кутты.

В заключение, методы Рунге-Кутты представляют собой мощный инструмент численного решения дифференциальных уравнений, обеспечивая высокую точность и стабильность, что делает их незаменимыми в различных областях науки и техники. Эти методы, начиная с простых последовательностей и заканчивая более сложными адаптивными схемами, дают возможность эффективно справляться как с линейными, так и с нелинейными задачами.

Ключевым аспектом методов Рунге-Кутты является их способность контролировать ошибку с помощью многошаговых подходов, что позволяет оптимизировать вычислительные затраты. Эти методы демонстрируют выдающиеся результаты в задачах инженерии, физики и биологии, где необходима высокая степень предсказуемости динамики систем.

Следует отметить, что выбор конкретного метода зависит от специфики задачи и требований к точности. Таким образом, применение методов Рунге-Кутты становится важным шагом для исследователей, стремящихся к эффективному моделированию и анализу сложных процессов. Их распространение в современных вычислительных реализациях подтверждает актуальность этих методов в условиях постоянно развивающихся технологий.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мышенков, В.И. Численные методы. Ч. 2 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие для студентов специальности 73000 / В.И. Мышенков, Е.В. Мышенков – М.:МГУЛ, 2005 – 109 с.
2. Чернусь, П.П. Численные методы и их применение в Matlab: практическое пособие / П.П. Чернусь, Петр П. Чернусь; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2018. – 90 с.
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков . — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 630 с. — С. 363-375.
4. Ильина, В.А. Численные методы для физиков-теоретиков. Ч. 2. / В.А. Ильина, П.К. Силаев — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 118 с. — С. 16—30.
5. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] / Донецкий национальный технический университет. — Режим доступа: [https://masters.donntu.ru/2013/fknt/vodolazskiy/library/nummethod\\_book\\_chapter4-1%20Ahor%20-%20Alexey%20Skobelev.pdf](https://masters.donntu.ru/2013/fknt/vodolazskiy/library/nummethod_book_chapter4-1%20Ahor%20-%20Alexey%20Skobelev.pdf). — Дата доступа: 14.12.2024.